19/10/2015

2ο κεφάλαιο: "Επίλυση μη γραμμικών εξισώσεων"

Πρόβλημα: Δοθείσης συνάρτησης f να βρεθεί $x^* \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $f(x^*)=0$
Για πολυωνυμικές εξισώσεις έχουμε αναλυτικές λύσεις μόνο μέχρι 4ου βαθμού πολυώνυμα ή σε ειδικά πολυώνυμα και για τις ρίζες τριωνύμου απαιτείται η εύρεση $\sqrt{y}$, $y \in \mathbb{R}^+$, επειδή γενικά $\sqrt{y}$ είναι άρρητος αριθμός, αυτή προσεγγίζεται με αριθμητικές μεθόδους. Οι αριθμητικές μέθοδοι συνίστανται στην κατασκευή μιας ακολουθίας $(x_n)_{n=0}$ τέτοια ώστε $\lim_{n\to\infty} x_n = x^*$

1η Μέθοδος: Μέθοδος Διχοτόμησης (Μέθοδος Bolzano)

Έστω $f \in C[a,b]$, τέτοια ώστε $\operatorname{sgn} f(a) \neq \operatorname{sgn} f(b)$

$$\operatorname{sg} x = \begin{cases} 1, & \text{αν } x>0 \\ 0, & \text{αν } x=0 \\ -1, & \text{αν } x<0 \end{cases}$$

$f(a)\,f(b) \leq 0$

Αν $f(a)=0$ ή $f(b)=0$, τότε $x^*=a$ ή $x^*=b$ αντίστοιχα

Αν $f(a)\,f(b)<0$, τότε παίρνουμε $c=\frac{a+b}{2}$ και διακρίνουμε περιπτώσεις

α) $f(c)=0$, τότε $x^*=c$

β) $f(c)\neq 0$

β1) $f(a)\,f(c)<0$, τότε παίρνουμε ως νέο διάστημα $[a,b] \rightsquigarrow [a,c]$

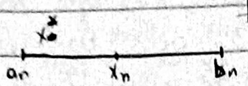
β2) $f(a)\cdot f(c) > 0$ $(f(c)\cdot f(b)<0)$, τότε παίρνουμε ως νέο διάστημα $[a,b]$ το $[c,d]$

Ταχύτητα Σύγκλισης

Θεωρούμε $I_1=[a_1,b_1]=[a,b]$ $I_k=[a_k,b_k]$ το διάστημα που προέκυψε με $k-1$ επαναλήψεις ($I_{k+1}\subset I_k$)

$$b_n-a_n=\frac{b_{n-1}-a_{n-1}}{2}=\frac{b_{n-2}-a_{n-2}}{2^2}=\dots=\frac{b_1-a_1}{2^{n-1}}=\boxed{\frac{b-a}{2^{n-1}}}$$

$$|x_n-x^*|\le\frac{b_n-a_n}{2}=\frac{b-a}{2^n}$$



Πλεονεκτήματα της μεθόδου

1) Απαιτείται μόνο συνέχεια της f
2) Είναι απλή ως αλγόριθμος
3) Υπολογισμός μια φορά της f ανά επανάληψη
4) Μπορούμε να προϋπολογίσουμε τον αριθμό επαναλήψεων για δεδομένη ακρίβεια $\varepsilon>0$

Επιθυμούμε $|x_n-x^*|\le\varepsilon$, γνωρίζουμε ότι $|x_n-x^*|\le\frac{b-a}{2^n}$ αν απαιτήσουμε $\frac{b-a}{2^n}\le\varepsilon$, τότε $|x_n-x^*|\le\varepsilon$

$$\frac{b-a}{2^n}\le\varepsilon\iff\log\frac{b-a}{2^n}\le\log\varepsilon\iff\log(b-a)-\log2^n\le\log\varepsilon$$

$$\iff n\cdot\log2\ge\log\frac{b-a}{\varepsilon}\iff n\ge\frac{\log\frac{b-a}{\varepsilon}}{\log2}.$$

Ο αριθμός επαναλ. δίνεται από το μικρότερο n τ.ω. $n\ge\frac{\log\frac{b-a}{\varepsilon}}{\log2}$.

Μειονεκτήματα: Πολύ αργή μέθοδος!

Άσκηση: ν.δ.ο η εξίσωση $f(x)=x^3-x-1=0$ έχει μόνο μία πραγματική ρίζα x^* που βρίσκεται στο διάστημα $[1,2]$. Με $[a,b]=[1,2]$ υπολογίστε τη δεύτερη προσέγγιση του x^* με τη μέθοδο διχοτόμησης. Πόσα βήματα απαιτούνται για τον υπολογισμό μιας προσέγγισης του x^* που απέχει 10^{-6} από το x^*

$f(1) = 1^3 - 1 - 1 = -1 < 0$ $\quad f(2) = 2^3 - 2 - 1 = 8 - 2 - 1 = 8 - 3 = 5 \Rightarrow \exists$ ρίζα $x^* \in [1,2]$

$f'(x) = 3x^2 - 1$. Η $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 1 = 0$ έχει ρίζες $x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

$f'(x) > 0 \Rightarrow x \in \left(-\infty, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right) \Rightarrow f(x) \nearrow$ $\quad f\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{9} - \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) - 1 = \frac{2\sqrt{3}}{9} - 1 < 0$

$\Rightarrow f(x) < 0$ για $x \in \left(-\infty, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right]$ Το $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ είναι τοπικό μέγιστο

$f'(x) < 0,\ x \in \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right) \Rightarrow f(x) \downarrow$

$f'(x) > 0,\ x \in \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, +\infty\right) \Rightarrow f(x) \uparrow \Rightarrow \exists$ μοναδική ρίζα που βρίσκεται στο $[1,2]$

$\rightarrow I_1 = [a_1, b_1] = [1,2],\ x_1 = \frac{a_1 + b_1}{2} = \frac{1+2}{2} = \frac{3}{2} = 1.5$ $\quad f\left(\frac{3}{2}\right) = \left(\frac{3}{2}\right)^3 - \frac{3}{2} - 1 \Rightarrow$

$f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{27 - 12 - 8}{8} = \frac{7}{8} > 0$

$f(1)\, f\left(\frac{3}{2}\right) < 0 \Rightarrow I_2 = \left[1, \frac{3}{2}\right]$ $\quad x_2 = \frac{a_2 + b_2}{2} = \frac{1 + \frac{3}{2}}{2} = \frac{\frac{5}{2}}{2} = \frac{5}{4} = 1.25$

$n \geq \frac{\log \frac{b-a}{\varepsilon}}{\log 2} = \frac{\log \frac{1}{10^{-6}}}{\log 2} = \frac{\log 10^{-6}}{\log 2} \simeq \frac{6}{0.301} \simeq 19.9316 \Rightarrow n = 20$

<u>2η μέθοδος</u> "Επαναληπτική Μέθοδος"

Εστω $f \in C[a,b]$ για τη λύση της $f(x) = 0$ αναδιατάσσω την εξίσωση $f(x) = 0$ στην μορφή $x = \varphi(x)$. Αυτό γίνεται κατά άπειρους τρόπους

Αν $x^* \in [a,b]$ είναι ρίζα της $f(x) = 0$ τότε x^* είναι ρίζα της $x = \varphi(x)$ $(x^* = \varphi(x^*))$ Η αναδιάταξη αυτή οδηγεί στην ιδέα της κατασκευής ακολου-θιας $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ τ.ω $x_0 \in [a,b]$ επιλεγμένο αυθαίρετα και $x_{n+1} = \varphi(x_n)$ $n = 0, 1, 2, \ldots$ Αν η ακολουθία συγκλίνει, θα συγκλίνει στο x^*

$y = \lim_{n \to \infty} x_{n+1} = \lim_{n \to \infty} \varphi(x_n) \underset{\text{συνεχής}}{=} \varphi\left(\lim_{n \to \infty} x_n\right) = \varphi(y) = y \Rightarrow y = x^*$.

Θα λέμε ότι το x^* είναι σταθερό σημείο της φ.

<u>Πρόταση</u> Αν η $\varphi \in C[a,b]$ είναι $\varphi: [a,b] \to [a,b]$, τότε υπάρχει τουλ-άχιστον ένα σταθερό σημείο της φ στο $[a,b]$

<u>Αποδ</u>. Αφού $\varphi: [a,b] \to [a,b] \Rightarrow \varphi(a) \geq a$ και $\varphi(b) \leq b$

Αν $\varphi(a) = a$, τότε a σταθερό σημείο, αν $f(b) = b$, τότε b σταθερό σημείο.

Αν $f(a) > a$ και $f(b) < b$, ορίζω την συνάρτηση $g \in C[a,b] : g(x) = \varphi(x) - x$, τότε $g(a) = \varphi(a) - a < 0$, $g(b) > 0$. Από το θεώρημα ενδιάμεσης τιμής $\exists x^* \in [a,b]$ τ.ω. $g(x^*) = 0 \Longleftrightarrow x^* = \varphi(x^*) \Rightarrow x^*$ σταθερό σημείο